

Corrigé du TD n°4

1) Pour déterminer la contrainte budgétaire inter-temporelle du consommateur, il faut dans un premier temps distinguer chacune des périodes. Pour la période A, on note s (comme stock) la quantité qui est stockée (et qui n'est donc pas consommée). La contrainte budgétaire, pour cette période, s'écrit :

$$p_A c_A + p_A s \leq R_A \quad \text{et} \quad s \geq 0$$

Comme, d'une période à l'autre, le stock se déprécie au taux δ , il ne reste à la seconde période que la quantité $(1-\delta)s$ si le consommateur a stocké à la première période la quantité s . Aussi la contrainte budgétaire de la seconde période s'exprime comme suit :

$$p_R c_R \leq R_R + p_R(1-\delta)s$$

En effet, au début de la seconde période, le consommateur a pu vendre la quantité $(1-\delta)s$ au prix p_R ; il en retire ainsi un revenu égal à $p_R(1-\delta)s$.

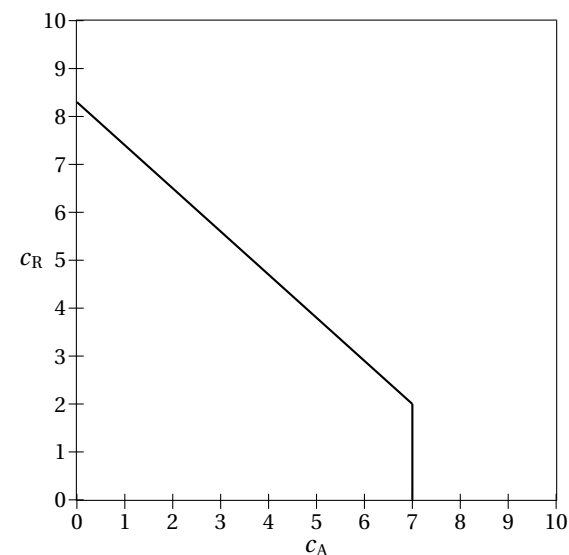
En pré-multipliant la seconde contrainte budgétaire par $\frac{p_A}{p_R(1-\delta)}$ et en sommant les deux contraintes, on obtient la contrainte budgétaire inter-temporelle du consommateur :

$$p_A c_A + \frac{p_A}{1-\delta} c_B \leq R_A + \frac{p_A}{p_R(1-\delta)} R_B$$

D'une part, le terme s a disparu de cette contrainte budgétaire inter-temporelle mais, pour être rigoureux, il faudrait continuer à exprimer la contrainte selon laquelle $s \geq 0$ qui prendrait maintenant la forme $p_A c_A \leq R_A$. D'autre part, à gauche et à droite de cette inégalité, apparaissent des chroniques actualisées de consommations d'un côté, de revenus de l'autre côté. Les consommations, exprimées en termes réels, sont actualisées par le facteur $1/(1-\delta)$; les revenus, exprimés en termes nominaux, sont actualisés par le facteur $p_A/[p_R(1-\delta)]$.

Le graphique est porté sur la figure 1 ; j'ai pris $p_A = p_R = 1$, $R_A = 7$, $R_R = 2$ et $\delta = 0,9$ pour le tracer. La droite de budget passe nécessairement par le point $(7; 2)$; elle passe aussi par le point $(0; 0,9 \times 7 + 2) = (0; 8,3)$ si le consommateur stocke la totalité de son revenu de la première période. Par contre, comme le consommateur ne peut consommer en première période, au maximum, que R_A/p_A , l'ensemble de budget est borné par la droite verticale d'équation, sur le graphique, $c_A = 7$. La pente est en valeur absolue inférieure à 1 ; elle est égale à 0,9. En l'absence d'inflation, le coût du stockage est égal à la dépréciation : en stockant une unité la première période, on ne dispose que de $1-\delta$ unité la seconde période.

FIG. 1 – Ensemble de consommation inter-temporelle au cas d'un bien de consommation stockable



2) En présence d'un marché financier, on peut distinguer dans un premier temps le cas où le consommateur veut emprunter en première période du cas où le consommateur veut épargner. Notons E et S les montants nominaux de l'emprunt et de l'épargne. Au cas de l'emprunt les deux contraintes sont :

$$p_A c_A \leq R_A + E \quad \text{et} \quad p_R c_R + (1+r)E \leq R_R$$

Par contre, au cas de l'épargne, les contraintes sont :

$$p_A c_A + S \leq R_A \quad \text{et} \quad p_R c_R \leq R_R + (1+r)S$$

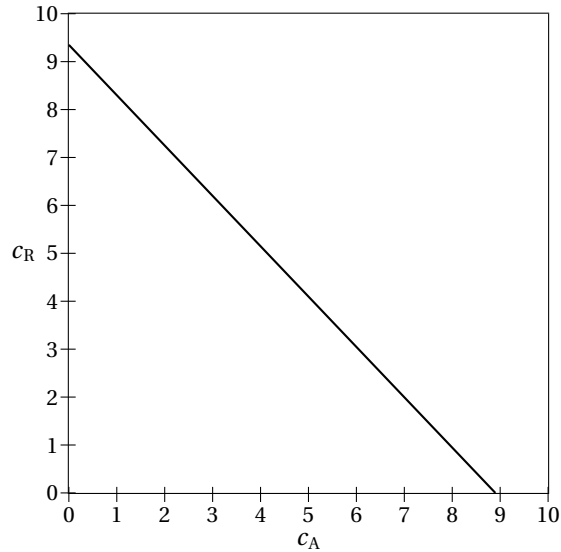
L'emprunt constitue une ressource en première période et son remboursement (principal et intérêt) une charge en seconde période. L'épargne constitue une dépense (l'achat d'un actif financier) en première période et les fruits de l'épargne (remboursement du principal et perception des intérêts) une ressource en seconde période.

Là encore, la seconde contrainte peut être pré-multipliée par $1/(1+r)$ et, en sommant les deux contraintes, on obtient l'unique contrainte inter-temporelle suivante :

$$p_A c_A + \frac{p_R}{1+r} c_R \leq R_A + \frac{1}{1+r} R_R$$

Il n'apparaît plus nécessaire de distinguer les deux cas ; cela vient de l'hypothèse du marché financier « parfait » pour laquelle le taux d'intérêt créditeur est égal au taux d'intérêt débiteur – hypothèse parfaitement irréaliste.

FIG. 2 – Ensemble de consommation inter-temporel au cas d'un marché financier « parfait »



Le graphique est porté sur la figure 2 ; comme précédemment, j'ai pris $p_A = p_R = 1$, $R_A = 7$, $R_R = 2$ pour le tracer. Je retiens en outre $r = 0,05$. La contrainte budgétaire inter-temporelle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$p_1 c_A + p_2 c_R \leq W$$

où $p_1 = p_A$, $p_2 = p_R/(1+r)$ et $W = R_A + (1/(1+r))R_R$. W s'interprète comme la richesse inter-temporelle du consommateur. Si le consommateur veut consommer toute sa richesse en première période, le point correspondant est $(W/p_1; 0)$ soit $([R_A + (1/(1+r))R_R]/p_A; 0)$. Avec nos chiffres, cela donne $([7 + 1/1,05 \times 2]/1; 0) \approx (8,9; 0)$. Si le consommateur veut, par contre, tout consommer en seconde période, le point est $(0; W/p_2) = (0; [R_A + (1/(1+r))R_R]/[p_R/(1+r)]) = (0; [(1+r)R_A + R_R]/p_R)$. Soit, avec nos chiffres, $(0; (1,05 \times 7 + 2)/1) = (0; 9,35)$. Bien sûr, la droite de budget passe par le point $(7; 2)$.

La pente, en valeur absolue, de la droite de budget est donc égale à p_1/p_2 soit $\frac{p_A}{p_R}(1+r)$. En l'absence d'inflation, comme je l'ai retenu pour le graphique, la pente est simple-

ment égale à $1+r$, soit avec nos chiffres 1,05. En supposant que le taux d'intérêt nominal r est positif et que le taux de dépréciation est positif lui-aussi, la pente de la droite de budget, en valeur absolue, est plus forte en présence du marché financier que sous l'hypothèse du bien de consommation stockable. De plus, le consommateur est en mesure d'emprunter pour consommer, en première période, un plus grand volume de consommation que le pouvoir d'achat de son revenu courant. Aussi l'ensemble de budget du consommateur s'est-il « agrandi » pour deux raisons. D'une part, si ce dernier veut transférer du pouvoir d'achat vers le futur, le rendement que lui apporte le marché financier est supérieur, en général, au rendement qu'il obtient en stockant le bien de consommation ; d'autre part, il peut consommer en première période, à condition de rester solvable, plus que son revenu courant en emprunt. Le consommateur gagne donc à la présence du marché financier.

3) Pour définir le taux d'intérêt réel, il nous faut tout d'abord définir le taux d'inflation. p_A et p_R s'interprètent comme le niveau général des prix pour chacune des deux périodes puisque c_A et c_R sont des consommations agrégées. Notons π le taux d'inflation entre les deux périodes ; par définition, il est égal au taux de croissance du niveau général des prix, soit $\pi = (p_R - p_A)/p_A$. On peut aussi écrire $p_R = (1+\pi)p_A$. Aussi la chronique des consommations réelles est-elle actualisée comme suit :

$$p_A c_A + \frac{1+\pi}{1+r} p_A c_R$$

On va utiliser deux approximations successivement :

$$1 + \varepsilon \approx \frac{1}{1 - \varepsilon} \quad \text{et} \quad (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) \approx 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

La première approximation se justifie par le fait que la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction $y = f(x) = 1/(1-x)$ est égale à -1 quand x est égal à 0. La seconde par le fait que le terme $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ est négligeable par rapport à ε_1 et à ε_2 quand ces deux termes sont, en valeur absolue, petits. On obtient ainsi :

$$\frac{1+\pi}{1+r} \approx \frac{1}{(1+r)(1-\pi)} \approx \frac{1}{1+r-\pi}$$

On fait donc apparaître le taux d'intérêt réel, noté ρ , qui est égal à $r - \pi$. Le facteur d'actualisation de la chronique des consommations réelles est le taux d'intérêt réel :

$$p_A c_A + \frac{p_A}{1+\rho} c_R$$

Notons que la pente de la droite de budget inter-temporelle est égale à $1+\rho$.

4) Quand la fonction d'utilité du consommateur prend la forme suivante :

$$u(c_A, c_R) = \frac{1}{\sigma-1} \left(c_A^{(\sigma-1)/\sigma} + \frac{1}{1+\theta} c_R^{(\sigma-1)/\sigma} \right) \quad \sigma, \theta > 0$$

on interprète le paramètre σ comme l'élasticité de substitution inter-temporelle de la consommation et le paramètre θ comme la préférence pour le présent. En effet, d'une part, on reconnaît une forme CES ; d'autre part, on voit que la chronique des utilités est actualisée par le facteur θ .

5) La condition « le TMS est égal au rapport des prix » s'écrit, dans ce cas, comme suit :

$$\frac{c_A^{-1/\sigma}}{\frac{1}{1+\theta} c_R^{-1/\sigma}} = \frac{p_A}{1+\rho}$$

Cette condition prend la forme suivante, particulièrement simple :

$$\frac{c_A}{c_R} = \left(\frac{1+\theta}{1+\rho} \right)^\sigma$$

qui autorise les interprétations économiques suivantes.

D'un côté, si l'élasticité de substitution inter-temporelle est nulle (c'est-à-dire si $\sigma = 0$), le consommateur veut absolument stabiliser sa consommation au cours de son cycle de vie. Dans ce cas, le terme $[(1+\theta)/(1+\rho)]^\sigma$ est égal à 1 et on obtient $c_A^* = c_R^*$. De l'autre côté, si le rendement réel de l'épargne (qui est le fruit de la renonciation à la consommation aujourd'hui pour consommer demain) compense exactement l'impatience du consommateur (c'est-à-dire si $\rho = \theta$), le terme $[(1+\theta)/(1+\rho)]^\sigma$ est là encore égal à 1 et l'on a $c_A^* = c_R^*$. Notons que ce dernier cas serait plutôt improbable : le rendement réel de l'épargne est une grandeur objective, commune *a priori* à l'ensemble des consommateurs, qui est donnée par le marché financier ; en revanche, l'impatience du consommateur est une grandeur subjective, spécifique *a priori* à chaque consommateur.

6) Si l'on suppose maintenant que $\sigma = 1$, la condition précédente se réécrit comme suit :

$$\frac{c_A^*}{c_R^*} = \frac{1+\theta}{1+\rho} \quad \text{soit} \quad c_R^* = \frac{1+\rho}{1+\theta} c_A^*$$

Pour résoudre, le plus simple est donc de procéder par substitution et de reporter une telle expression de c_R^* dans la contrainte budgétaire inter-temporelle (qui est saturée), soit :

$$p_A c_A^* + \frac{p_A}{1+\rho} \frac{1+\rho}{1+\theta} c_A^* = W$$

où W est la richesse inter-temporelle du consommateur. La consommation optimale de la première période est donc égale à :

$$c_A^* = \frac{1+\theta}{2+\theta} \frac{W}{p_A} = \frac{1+\theta}{2+\theta} \left(\frac{R_A}{p_A} + \frac{1}{1+r} \frac{R_R}{p_A} \right)$$

De même, l'épargne optimale, notée S^* , est égale à

$$S^* = R_A - p_A c_A^* = \frac{1}{2+\theta} R_A - \frac{1+\theta}{2+\theta} \frac{R_R}{1+r}$$

Pour interpréter cette dernière expression, le plus simple est d'abord de supposer $R_R = 0$. Dans ce cas, l'épargne apparaît comme une fraction, constante, du revenu du consommateur (que l'on doit ici assimiler à sa richesse). On voit notamment que le taux d'intérêt ne joue aucun rôle pour expliquer le partage de la richesse du consommateur entre la consommation et l'épargne. Cela semble étranger à la théorie néo-classique pour laquelle le taux d'intérêt est la variable qui, justement, doit permettre, par ses variations, d'ajuster l'offre de fonds prêtables (l'épargne des ménages) et la demande de fonds prêtables (l'investissement des entreprises). Il faut revenir aux effets de substitution et de revenu pour comprendre ce qui se passe. Au cas particulier de l'arbitrage entre consommer aujourd'hui et consommer demain, l'effet de substitution dispose qu'une hausse du taux d'intérêt encourage l'épargne : le consommateur, parce que sa renonciation à consommer aujourd'hui est mieux rémunérée, va accroître son épargne ; en revanche, l'effet de revenu dispose qu'une hausse du taux d'intérêt décourage l'épargne : pour obtenir le même niveau de consommation demain, il suffit d'épargner un plus faible montant puisque l'épargne est mieux rémunérée. Dans cette question, on a pris $\sigma = 1$, soit le cas COBB-DOUGLAS. On sait dans ce cas que les effets de substitution et de revenu se compensent exactement. C'est donc ce que l'on retrouve : l'épargne ne dépend pas du taux d'intérêt parce que, dans le cas COBB-DOUGLAS, l'effet de substitution est exactement annulé par l'effet de revenu.

Si l'on avait pris $\sigma < 1$, l'effet de revenu aurait dominé l'effet de substitution et l'épargne serait une fonction décroissante du taux d'intérêt. Si l'on avait pris $\sigma > 1$, l'effet de substitution aurait dominé l'effet de revenu et l'épargne serait une fonction croissante du taux d'intérêt. Vous pouvez refaire les calculs en prenant, pour faire simple, $\sigma = 0,5$ et $\sigma = 2$ pour illustrer cette proposition.

Pour autant, on voit en prenant $R_R \neq 0$ que l'épargne est une fonction croissante du taux d'intérêt puisque, dans le terme $-[(1+\theta)/(2+\theta)][R_R/(1+r)]$, le taux d'intérêt intervient au dénominateur d'un terme qui exerce une influence négative. Ceci est une « curiosité théorique » : la hausse du taux d'intérêt réduit la valeur réelle relative du revenu de la seconde période et, ainsi, la richesse réelle totale de l'individu. L'individu, en conséquence, réduit ses consommations mais l'épargne en est accrue puisque le revenu de première période est inchangé.