Université PARIS-XII — Faculté de Sciences économiques et de gestion
Master *Sciences économiques*
Mention *Économie quantitative et expertise internationale*
Économétrie III — *F. LEGENDRE* — année universitaire 2005-06

Fiche de travail n°5 Le théorème de FRISCH–WAUGH et l'estimateur intra-individuel

Je vous propose dans cette cinquième fiche de travail d'illustrer, dans un premier temps, le théorème de FRISCH–WAUGH et, dans un second temps, d'appliquer ce théorème au cas de l'estimateur intra-individuel sur données de panel.

1 Le théorème de FRISCH–WAUGH

Nous partons du modèle suivant :

$$y_i = \alpha x_i + \beta z_i + u_i \quad i = 1, \cdots, \mathrm{N}$$

soit, avec des notations matricielles :

$$\underline{y} = \alpha \underline{x} + \beta \underline{z} + \underline{u}$$

Dans ce modèle, le paramètre d'intérêt est α. Il est nécessaire d'inclure dans le modèle la variable z (sinon cette variable serait manquante) mais le paramètre β ne nous intéresse pas. Le théorème de FRISCH–WAUGH nous montre de quelle façon l'on peut se débarrasser de la variable z.

Soit $\mathscr{W}$ le sous espace vectoriel engendré par $\underline{z}$. Soit $p_w(\cdot)$ la projection orthogonale sur $\mathscr{W}$. Le modèle, quand il a été ajusté par la méthode des MCO, s'écrit :

$$\underline{y} = \widehat{\alpha} \underline{x} + \widehat{\beta} \underline{z} + \underline{\widehat{u}}$$

En appliquant la projection $p_w(\cdot)$ aux deux membres de cette égalité, on obtient, en exploitant la linéarité de la projection :

$$p_w(\underline{y}) = p_w(\widehat{\alpha}\underline{x} + \widehat{\beta}\underline{z} + \underline{\widehat{u}}) = \widehat{\alpha} p_w(\underline{x}) + \widehat{\beta} p_w(\underline{z}) + p_w(\underline{\widehat{u}})$$

Il faut maintenant remarquer les deux points suivants :

1. $p_w(\underline{z}) = \underline{z}$ puisque $\underline{z} \in \mathscr{W}$;
2. $p_w(\underline{\widehat{u}}) = \underline{0}$ puisque $\underline{\widehat{u}} \perp \underline{z}$.

En formant la différence entre l'expression initiale et cette dernière expression, on obtient :

$$[\underline{y} - p_w(\underline{y})] = \widehat{\alpha}[\underline{x} - p_w(\underline{x})] + \underline{\widehat{u}}$$

En définissant $\underline{\widetilde{y}}$ et $\underline{\widetilde{x}}$, respectivement, égaux à $\underline{y} - p_w(\underline{y})$ et à $\underline{x} - p_w(\underline{x})$, on obtient donc la décomposition suivante :

$$\underline{\widetilde{y}} = \widehat{\alpha}\underline{\widetilde{x}} + \underline{\widehat{u}}$$

$\underline{\widetilde{y}}$ est le résidu de l'ajustement de y sur z et $\underline{\widetilde{x}}$ le résidu de l'ajustement de x sur z. Il reste à nous assurer que cette décomposition est bien celle des MCO. C'est immédiat à démontrer : il suffit de remarquer que $\underline{\widetilde{x}} \perp \underline{\widehat{u}}$.

Je vous propose d'illustrer ce théorème, sous SAS, en

1. engendrant un jeu d'observations artificielles ;
2. transformant les données selon la directive du théorème de FRISCH–WAUGH ;
3. estimant les deux modèles.

```
DATA table ;
  DO i = 1 TO 100 ; DROP i ;
    x = NORMAL(123456) ;
    z = NORMAL(123456) ;
    y = 2*x - 4*z + NORMAL(123456) ;
    OUTPUT ;
  END ;
RUN ;
PROC reg DATA = table NOPRINT ;
  MODEL y = z / NOINT ;
  OUTPUT OUT = fw_y R = y_tilde ;
  MODEL x = z / NOINT ;
  OUTPUT OUT = fw_x R = x_tilde ;
RUN ;
DATA fw ;
  MERGE fw_y fw_x ;
RUN ;
PROC reg DATA = fw ;
  MODEL y = x z / NOINT ;
  MODEL y_tilde = x_tilde / NOINT ;
RUN ;
```

Les points suivants peuvent être notés :

1. la fonction `NORMAL(arg)` permet d'obtenir une réalisation pseudo-aléatoire d'une loi normale centrée réduite, si `arg` est égal à 0, SAS utilise l'horloge de l'ordinateur pour fixer le point de départ de la suite de nombres pseudo-aléatoire, si `arg` est strictement positif, SAS utilise l'argument pour fixer le point de départ ;

2. l'instruction OUTPUT de la PROC reg s'applique à l'instruction MODEL qui précède, on peut coder, dans une PROC reg, plusieurs instructions MODEL, on peut donc coder plusieurs instructions OUTPUT.

2 L'estimateur intra-individuel

L'estimateur intra-individuel est celui du modèle où l'hypothèse d'effet fixe individuel est retenue :

$$y_{it} = \alpha x_{it} + \beta_i + u_{it} \quad i = 1, \cdots, \mathrm{N} \;\; t = 1, \cdots, \mathrm{T}$$

Sous forme vectorielle, le modèle s'écrit :

$$\underline{y} = \alpha \underline{x} + \beta_1 \underline{e}^1_{\mathrm{NT}} + \beta_2 \underline{e}^2_{\mathrm{NT}} + \cdots + \beta_i \underline{e}^i_{\mathrm{NT}} + \cdots + \beta_{\mathrm{N}} \underline{e}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{NT}} + \underline{u}$$

où $\underline{e}^i_{\mathrm{NT}}$ est la variable indicatrice de l'individu i. Cette variable comporte NT lignes ; ses éléments sont soit un 1 quand la ligne est relative à l'individu i soit sinon un 0. Cette écriture a l'avantage de bien faire apparaître les N variables explicatives liées aux coefficients β_i.

On applique le théorème de Frisch–Waugh en prenant pour $\mathscr{W}$ le sous espace vectoriel engendré par $\underline{e}^1_{\mathrm{NT}}$, $\underline{e}^2_{\mathrm{NT}}$, ..., $\underline{e}^i_{\mathrm{NT}}$, ... et $\underline{e}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{NT}}$. En reprenant les mêmes notations que précédemment, le modèle devient :

$$\underline{\tilde{y}} = \alpha \underline{\tilde{x}} + \underline{u}$$

avec $\underline{\tilde{y}} = \underline{y} - p_w(\underline{y})$ et $\underline{\tilde{x}} = \underline{x} - p_w(\underline{x})$.

Il reste donc à montrer que la transformation des données correspond, pour chaque individu, à la mise à l'écart à la moyenne individuelle :

$$\tilde{y}_{it} = y_{it} - \overline{y}_i \quad \text{et} \quad \tilde{x}_{it} = x_{it} - \overline{x}_i$$

La matrice formée par la concaténation des vecteurs $\underline{e}^1_{\mathrm{NT}}$, $\underline{e}^2_{\mathrm{NT}}$, ..., $\underline{e}^i_{\mathrm{NT}}$, ... et $\underline{e}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{NT}}$ s'écrit $\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}}$ où $\underline{e}_{\mathrm{T}}$ est le vecteur de taille $\mathrm{T}\times 1$ composé seulement de 1. La matrice associée à la projection $p_w(\cdot)$ est donc égale à :

$$(\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}}) \left[(\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}})'(\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}}) \right]^{-1} (\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}})'$$

Comme

$$\left[(\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}})'(\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}}) \right]^{-1} = \left[\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}'_{\mathrm{T}} \underline{e}_{\mathrm{T}} \right]^{-1} = [\mathrm{I_N} \otimes \mathrm{T}]^{-1} = \frac{1}{\mathrm{T}} \mathrm{I_N}$$

on en déduit que

$$(\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}}) \left[(\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}})'(\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}}) \right]^{-1} (\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}})' = \frac{1}{\mathrm{T}} (\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}})(\mathrm{I_N} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}})' = \mathrm{I_N} \otimes \mathrm{B_T} = \mathrm{B}$$

Aussi la projection $p_w(\cdot)$ revient-elle à obtenir les moyennes individuelles puisque l'on retrouve la matrice B qui correspond à l'opérateur between.

On peut ainsi conclure que la transformation des variables du théorème de Frisch–Waugh correspond à l'utilisation de la matrice W.

$$\underline{\tilde{y}} = \underline{y} - p_w(\underline{y}) = \underline{y} - \mathrm{B}\underline{y} = \mathrm{W}\underline{y} \quad \text{et} \quad \underline{\tilde{x}} = \underline{x} - p_w(\underline{x}) = \underline{x} - \mathrm{B}\underline{x} = \mathrm{W}\underline{x}$$