Université PARIS-XII — Faculté de Sciences économiques et de gestion
Master *Sciences économiques* — Mention *Économie quantitative et expertise internationale*
Économétrie III — *F. LEGENDRE* — année universitaire 2005-06

Formulaire

1 Matrices symétriques et idempotentes

Une matrice carrée A (de taille N×N) est symétrique si

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A},$$

où A′ désigne la matrice transposée de A. Elle est, de plus, idempotente si

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{AA} = \mathrm{A},$$

Soient $\underline{x}$ un vecteur de taille N×1 et $\underline{y}$ son image par l'application linéaire $f(\cdot)$ représentée par la matrice A :

$$\underline{y} = f(\underline{x}) \quad \text{soit encore} \quad \underline{y} = \mathrm{A}\underline{x}.$$

On montre que $\underline{y}$ est un vecteur invariant par $f(\cdot)$:

$$f(\underline{y}) = \underline{y} \quad \text{soit encore} \quad \underline{y} = \mathrm{A}\underline{y}.$$

En effet, $\underline{y}$ s'écrit $\mathrm{A}\underline{x}$ et $\mathrm{A}\underline{y} = \mathrm{AA}\underline{x} = \mathrm{A}\underline{x} = \underline{y}$. La multiplication matricielle correspond à la composition des applications, ainsi AA = A s'interprète comme $f(f(\cdot)) = f(\cdot)$.

De plus, $\underline{y}$ est orthogonal à $\underline{x} - \underline{y}$:

$$\underline{y} \perp (\underline{x} - \underline{y}) \quad \text{soit encore} \quad \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} y_i(x_i - y_i) = \underline{y}'(\underline{x} - \underline{y}) = 0,$$

où y_i désigne la ième composante du vecteur $\underline{y}$. En effet, $\underline{y}'(\underline{x} - \underline{y}) = (\mathrm{A}\underline{x})'(\underline{x} - \mathrm{A}\underline{x}) = \underline{x}'\mathrm{A}'\underline{x} - \underline{x}'\mathrm{A}'\mathrm{A}\underline{x} = \underline{x}'\mathrm{A}\underline{x} - \underline{x}'\mathrm{A}^2\underline{x} = \underline{x}'\mathrm{A}\underline{x} - \underline{x}'\mathrm{A}\underline{x} = 0$ en utilisant le fait que la transposée d'un produit matriciel est le produit matriciel des transposées en inversant l'ordre des opérandes (c'est-à-dire $(\mathrm{AB})' = \mathrm{B}'\mathrm{A}'$ où A et B sont des matrices dont les tailles sont conformes).

Une matrice symétrique et idempotente représente ainsi une application linéaire qui est un projecteur orthogonal.

2 Vecteur aléatoire gaussien

Un vecteur aléatoire $\underline{x}$ (de taille N×1) est dit gaussien (d'espérance $\underline{\mu}$ de taille N×1 et de matrice de variance-covariance Ω de taille N×N) si la densité jointe des N composantes aléatoires de ce vecteur est de la forme :

$$f(\underline{x}) = (2\pi)^{\mathrm{N}/2}|\Omega|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu})'\Omega^{-1}(\underline{x} - \underline{\mu})\right)$$

où |Ω| désigne le déterminant de Ω. Cette matrice de variance-covariance Ω est symétrique ; elle regroupe les variances et les covariances des composantes aléatoires du vecteur $\underline{x}$. Un terme ω_{ii} de la diagonale de cette matrice est égal à $\mathrm{V}(x_i)$ (où V désigne la variance) ; un terme ω_{ij} de cette matrice est égal à $\mathrm{Cov}(x_i, x_j)$. On peut même écrire :

$$\mathrm{V}(\underline{x}) = \mathrm{E}\left[(\underline{x} - \underline{\mu})(\underline{x} - \underline{\mu})'\right] = \Omega$$

puisque $\mathrm{Cov}(x_i, x_j) = \mathrm{E}[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)]$.

3 Produit de Kronecker

Soient A et B deux matrices de taille, respectivement, M×N et K×L. Le produit de Kronecker de ces deux matrices est la matrice définie de la façon suivante :

$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathrm{B} & a_{12}\mathrm{B} & \cdots & a_{1n}\mathrm{B} \\ a_{21}\mathrm{B} & a_{22}\mathrm{B} & \cdots & a_{2n}\mathrm{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathrm{B} & a_{m2}\mathrm{B} & \cdots & a_{mn}\mathrm{B} \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est de taille $\mathrm{MK} \times \mathrm{NL}$.

Si les tailles des matrices sont conformes, les formules suivantes sont vérifiées :

$$\begin{gathered} (\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})(\mathrm{C} \otimes \mathrm{D}) = \mathrm{AC} \otimes \mathrm{BD} \\ (\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \otimes \mathrm{B}^{-1} \\ (\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})' = \mathrm{A}' \otimes \mathrm{B}' \end{gathered}$$

4 Dérivée matricielle

Soit f une fonction dont les arguments sont les variables x_1, x_2, …, x_N. Il est commode d'écrire que cette fonction dépend du vecteur $\underline{x}$ de taille N×1 dont les composantes sont les variables x_1, x_2, …, x_N. De la même manière, il est commode de regrouper les dérivées $\partial f / \partial x_1$, $\partial f / \partial x_2$, …, $\partial f / \partial x_\mathrm{N}$ de cette fonction en un vecteur. On note donc :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_\mathrm{N} \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur est de taille N×1.

Si $\underline{a}$ est un vecteur de taille N×1 et A une matrice symétrique de taille N×N, les formules suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\partial(\underline{a}'\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \underline{a}$$

$$\frac{\partial(\underline{x}'\mathrm{A}\underline{x})}{\partial \underline{x}} = 2\mathrm{A}\underline{x}$$