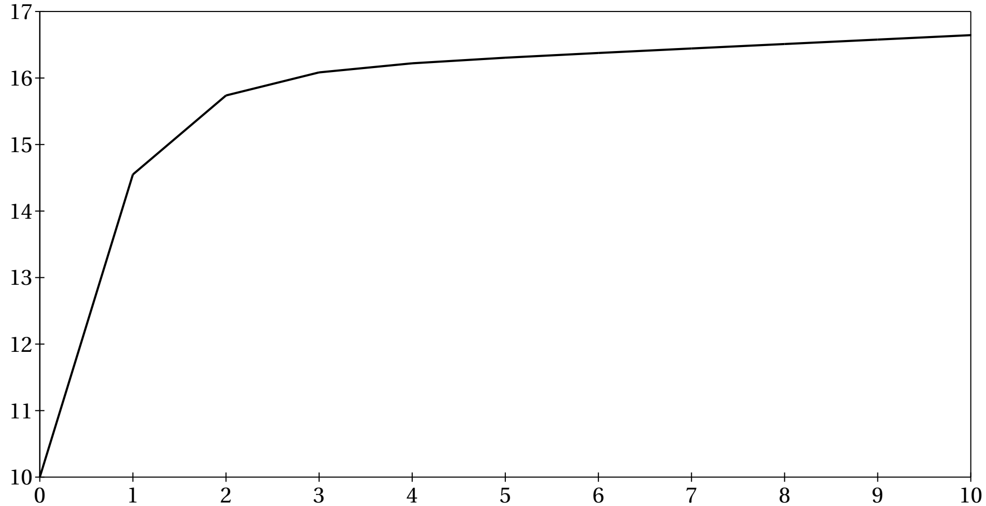
Université PARIS-XII — Faculté de Sciences économiques et de gestion
Master *Sciences économiques* – Mention *Économie quantitative et expertise internationale*
Séries temporelles — *F. LEGENDRE* — année universitaire 2006-07
F.Legendre@univ-paris12.fr – http://fj.legendre.free.fr

Corrigé sommaire du TD n°1

Il se peut que ce corrigé comporte encore quelques coquilles ; merci de me les rapporter.

I – Équation récurrence linéaire à coefficients réels constants - I

1. – La trajectoire figure ci-après.



Le programme SAS suivant a été utilisé pour obtenir cette trajectoire.

```
DATA table ;
  x_tm1 = 10 ;
  DO t = 1 TO 10 ;
    x = .25*x_tm1 + .05*t + 12 ;
    OUTPUT ;
    x_tm1 = x ;
  END ;
RUN ;
```

2. – La solution générale de l'équation homogène, notée u_t, est de la forme $\alpha\lambda^t$ où λ est la racine de l'équation caractéristique suivante

$$\lambda - 0{,}25 = 0.$$

On trouve, bien sûr, $\lambda = 0{,}25$. On a donc $u_t = \alpha\, 0{,}25^t$.

On sait que la solution particulière de l'équation complète, notée v_t, est de la forme $a\,t + b$. Cette solution vérifie l'équation ; on a donc

$$a\,t + b - 0{,}25(a(t-1)+b) = 0{,}05\,t + 12$$

Ceci se réduit à l'expression suivante.

$$0{,}75\,a\,t + 0{,}75\,b + 0{,}25\,a = 0{,}05\,t + 12$$

En identifiant terme à terme, on trouve en premier lieu $a = 0{,}05/0{,}75 = 1/15$. En second lieu, on trouve $b = \left(12 - 0{,}25\frac{1}{15}\right)/0{,}75 = 719/45 \approx 15{,}98$. La solution de l'équation récurrente est la somme de la solution générale et de la solution particulière.

Il nous reste maintenant à déterminer α en utilisant la condition initiale. La grandeur x_0 est égale à

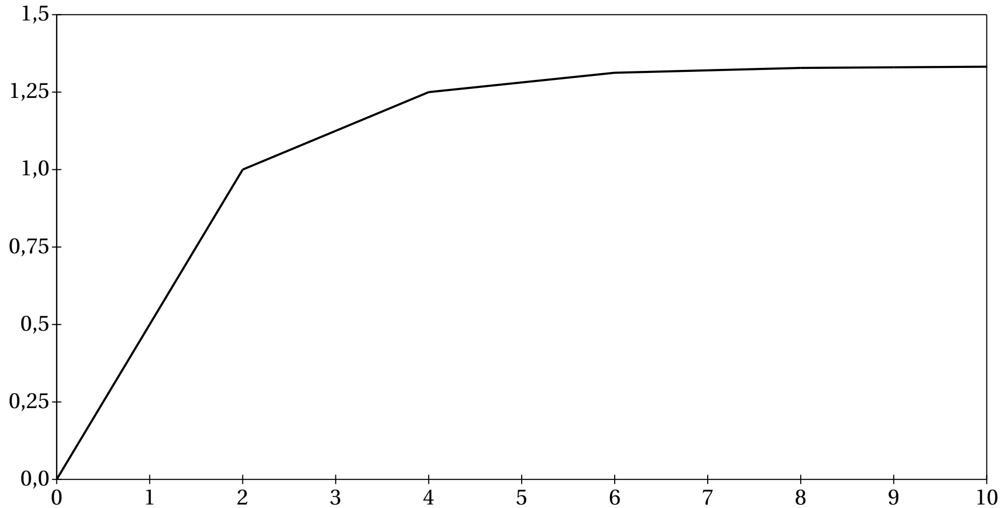
$$x_0 = u_0 + v_0 = \alpha + \frac{719}{45} = 10 \quad \text{soit} \quad \alpha = -\frac{269}{45} \approx -5{,}98$$

La solution est donc finalement

$$x_t = -\frac{269}{45}0{,}25^t + \frac{1}{15}t + \frac{719}{45}$$

II – Équation récurrence linéaire à coefficients réels constants - II

1. – La trajectoire figure ci-après.



Le programme SAS suivant a été utilisé pour obtenir cette trajectoire.

```
DATA table ;
  x_tm1 = .5 ; x_tm2 = 0 ;
  DO t = 2 TO 10 ;
    x = .25*x_tm2 + 1 ;
    OUTPUT ;
    x_tm2 = x_tm1 ; x_tm1 = x ;
  END ;
RUN ;
```

2. – La solution générale de l'équation homogène, notée u_t, est de la forme $\alpha_1(\lambda_1)^t + \alpha_2(\lambda_2)^t$ où λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation caractéristique suivante

$$\lambda^2 - 0{,}25 = 0.$$

On trouve ainsi $\lambda_1 = 0{,}5$ et $\lambda_2 = -0{,}5$. On a donc $u_t = \alpha_1\,0{,}5^t + \alpha_2\,(-0{,}5)^t$.

On sait que la solution particulière de l'équation complète, notée v_t, est de la forme a. Cette solution vérifie l'équation ; on a donc

$$a - 0{,}25\,a = 1 \quad \text{soit} \quad a = \frac{4}{3}$$

Il nous reste maintenant à déterminer α_1 et α_2 en utilisant les conditions initiales. Les grandeurs x_0 et x_1 sont égales à

$$x_0 = u_0 + v_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{4}{3} = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = u_1 + v_1 = 0{,}5\,\alpha_1 - 0{,}5\,\alpha_2 + \frac{4}{3} = 0{,}5$$

On trouve ainsi

$$\alpha_1 = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{1}{6}$$

La solution est donc finalement

$$x_t = -\frac{3}{2}\,0{,}5^t + \frac{1}{6}(-0{,}5)^t + \frac{4}{3}$$

III – Valorisation d'une action

1. – La détention d'une action est à l'origine de deux revenus de nature assez différente. D'un côté, la possession d'une action donne le droit à une part des bénéficies de l'entreprise ; cette part correspond aux dividendes, notés d_t dans cet exercice. De l'autre côté, le prix de l'actif évolue au cours du temps. La détention d'une action engendre donc soit une plus-value soit une moins-value. Cette plus ou moins value est notée $p_{t+1} - p_t$. Au total, les revenus (effectifs ou virtuels) liés à la détention de l'action sont donc égaux à $d_t + p_{t+1} - p_t$. Le rendement de l'action, au total, est donc égal à $(d_t + p_{t+1} - p_t)/p_t$. Il faut rapporter le rendement nominal de l'action au capital investi pour obtenir le rendement (relatif) de l'actif.

L'épargnant « rationnel » va donc acheter cet actif tant que le rendement que ce dernier procure est supérieur au rendement du placement alternatif dont le taux est égal à ρ. On obtient ainsi une condition d'arbitrage, c'est-à-dire l'équation suivante

$$\frac{d_t + p_{t+1} - p_t}{p_t} = \rho$$

où le terme de gauche est le rendement de l'action et le terme de droite le rendement du placement alternatif.

2. – Cette condition d'arbitrage se réécrit comme une équation récurrente linéaire à coefficients constants

$$p_{t+1} - (1+\rho)p_t = -d_t.$$

En utilisant l'opérateur de retard L, on obtient l'équation suivante

$$[1 - (1+\rho)\mathrm{L}]p_t = -d_t.$$

La solution générale de l'équation homogène, notée u_t, est de la forme $\alpha\lambda^t$ où λ est racine de l'équation caractéristique suivante

$$\lambda - (1+\rho) = 0.$$

On trouve, bien sûr, $\lambda = 1+\rho$. On a donc $u_t = \alpha(1+\rho)^t$. Cette solution n'est cependant pas convergente. Économiquement, elle s'interprète comme une « bulle » qui affecterait le cours de l'action. Le rendement que procure l'action est principalement déterminé par les perspectives de plus-values. Cette bulle n'est pas « irrationnelle » : le spéculateur fait simplement l'hypothèse qu'il se trouvera toujours des gens pour détenir l'actif.

3. – La suite des prix de l'action pourrait cependant être bornée. La solution générale pourrait être exclue en prenant $\alpha = 0$. Il faut donc rechercher la solution particulière de l'équation complète pour lui trouver une interprétation économique. Le second membre est de la forme $-d_t$. On ne sait pas *a priori* la forme de la solution particulière. L'équation se réécrit de la façon suivante

$$p_t = \frac{1}{1+\rho}p_{t+1} + \frac{1}{1+\rho}d_t$$

Cette forme nous invite à résoudre par substitutions successives « vers le futur ». Une première substitution nous donne l'expression suivante.

$$p_t = \frac{1}{1+\rho}\left(\frac{1}{1+\rho}p_{t+2} + \frac{1}{1+\rho}d_{t+1}\right) + \frac{1}{1+\rho}d_t$$

Une deuxième substitution fournit l'équation ci-après.

$$p_t = \frac{1}{1+\rho}\left[\frac{1}{1+\rho}\left(\frac{1}{1+\rho}p_{t+3} + \frac{1}{1+\rho}d_{t+2}\right) + \frac{1}{1+\rho}d_{t+1}\right] + \frac{1}{1+\rho}d_t$$

Par induction, l'expression suivante est obtenue.

$$p_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\tau+1} d_{t+\tau}$$

Le prix de l'action apparaît alors borné – si la suite (d_t) ne diverge pas «trop vite» –; ce prix correspond à la «valeur fondamentale» de l'action, égale à la valeur actualisée des flux futurs de dividendes.

On ne peut donc pas exclure la présence d'une «bulle spéculative» dans le cours d'un actif. Cette bulle repose sur une détention dans un but de spéculation. L'actif est acheté pour être ensuite revendu : le rendement provient principalement des plus-values. Cette bulle formellement correspond à la solution générale de l'équation homogène; elle peut cependant être exclue en prenant $\alpha = 0$. Cela veut dire que les individus coordonnent leurs anticipations sur la «valeur fondamentale» de l'actif pour laquelle le prix est la valeur actualisée des dividendes futurs.

La résolution «vers le futur» s'obtient aussi en utilisant l'opérateur de retard L. En effet, l'équation récurrente peut s'écrire comme suit

$$-(1+\rho)\left(1 - \frac{1}{1+\rho}\mathrm{L}^{-1}\right) p_t = -d_t$$

où $\mathrm{L}^{-1} p_t = p_{t+1}$. En inversant le polynôme, on obtient l'expression.

$$p_t = \frac{1}{1+\rho} \frac{1}{1 - \frac{1}{1+\rho}\mathrm{L}^{-1}} d_t$$

En développant, l'expression devient finalement

$$p_t = \frac{1}{1+\rho}\left[1 + \frac{1}{1+\rho}\mathrm{L}^{-1} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 \mathrm{L}^{-2} + \cdots\right] d_t = \frac{1}{1+\rho} d_t + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 d_{t+1} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^3 d_{t+2} + \cdots$$

IV – Corrélogrammes théoriques

1. – Modèle 1

1. Le corrélogramme est typique d'un processus MA(1) pour lequel les autocorrélations d'ordre deux ou d'ordre supérieur à deux sont nulles. On conjecture ainsi le processus suivant
$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$
avec $|\theta_1| < 1$ pour que le processus $\{\varepsilon_t\}$ soit bien l'innovation du processus $\{x_t\}$.

2. Il nous faut «remonter», depuis le coefficient d'autocorrélation ρ_1, au paramètre θ_1. La variance du processus, γ_0, est égale à
$$\gamma_0 = \mathrm{V}(x_t) = \mathrm{V}(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}) = \mathrm{V}(\varepsilon_t) + (\theta_1)^2 \mathrm{V}(\varepsilon_{t-1}) = [1 + (\theta_1)^2]\sigma_\varepsilon^2$$
parce que $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0$.
L'autocovariance d'ordre 1, γ_1, est égale à
$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(x_t, x_{t-1}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2}) = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2$$
L'autocorrélation d'ordre 1, ρ_1, est ainsi égale à
$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1}{1 + (\theta_1)^2}$$
Pour trouver θ_1, il nous faut donc résoudre l'équation suivante, du second degré :
$$\frac{-\theta_1}{1 + (\theta_1)^2} = 0{,}192 \quad \text{soit} \quad 0{,}192(\theta_1)^2 + \theta_1 + 0{,}192 = 0$$
Le discriminant est égal à 0,852544 et les racines sont, approximativement, $-0{,}2$ et -5. On sélectionne alors la première racine, $\theta_1 = -0{,}2$, pour retenir le processus canonique.

3. Le polynôme en L du modèle structurel s'écrit
$$x_t = [1 - (-0{,}2)\mathrm{L}]\varepsilon_t = (1 - \lambda \mathrm{L})\varepsilon_t$$
avec $\lambda = -0{,}2$. On a bien $|\lambda| < 1$: le modèle canonique a effectivement été sélectionné.

4. La prévision, en t, pour l'horizon k, est notée $\widehat{x}_t^{t+k}$. On retient l'espérance conditionnelle à l'information disponible en t pour former cette prévision. On a ainsi
$$\widehat{x}_t^{t+k} = \mathrm{E}(x_{t+k} \mid \Omega_t)$$
où Ω_t est l'ensemble d'information de la période t. Cet ensemble contient notamment x_t.
Pour prévoir x_{t+1}, on prend
$$\widehat{x}_t^{t+1} = \mathrm{E}(x_{t+1} \mid \Omega_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t+1} - \theta_1\varepsilon_t \mid \Omega_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t+1} \mid \Omega_t) - \theta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_t \mid \Omega_t) = 0 - \theta_1\varepsilon_t = -\theta_1\varepsilon_t$$
en sachant que la valeur de ε_t s'obtient à partir de l'ensemble d'information Ω_t en inversant «en arrière» le processus :
$$\varepsilon_t = x_t + \theta_1 x_{t-1} + (\theta_1)^2 x_{t-2} + \cdots$$
Pour prévoir x_{t+2}, on prend
$$\widehat{x}_t^{t+2} = \mathrm{E}(x_{t+2} \mid \Omega_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t+2} - \theta_1\varepsilon_{t+1} \mid \Omega_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t+2} \mid \Omega_t) - \theta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t+1} \mid \Omega_t) = 0 + 0 = 0$$
Plus généralement, on a
$$\widehat{x}_t^{t+k} = \mathrm{E}(x_{t+k} \mid \Omega_t) = 0 \ \ \forall k > 1$$
La mémoire du processus MA(1) est limitée : la prévision, au delà d'un horizon de une période, est égale à l'espérance du processus.

2. – Modèle 2

1. Le corrélogramme est typique d'un processus MA(2) pour lequel les autocorrélations d'ordre trois ou d'ordre supérieur à trois sont nulles. On conjecture ainsi le processus suivant
$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$
où $\theta_1 = 0$ puisque $\rho_1 = 0$.

2. Il nous faut «remonter», depuis les coefficients d'autocorrélation ρ_1 et ρ_2, aux paramètres θ_1 et θ_2. La variance du processus, γ_0, est égale à
$$\gamma_0 = \mathrm{V}(x_t) = \mathrm{V}(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}) = \mathrm{V}(\varepsilon_t) + (\theta_1)^2\mathrm{V}(\varepsilon_{t-1}) + (\theta_2)^2\mathrm{V}(\varepsilon_{t-2}) = [1 + (\theta_1)^2 + (\theta_2)^2]\sigma_\varepsilon^2$$
parce que $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0 \ \forall t \neq t'$.
L'autocovariance d'ordre 1, γ_1, est égale à
$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(x_t, x_{t-1}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \theta_2\varepsilon_{t-3}) = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_\varepsilon^2$$
L'autocorrélation d'ordre 1, ρ_1, est ainsi égale à
$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + (\theta_1)^2 + (\theta_2)^2}$$
L'autocovariance d'ordre 2, γ_2, est égale à
$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(x_t, x_{t-2}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-3} - \theta_2\varepsilon_{t-4}) = -\theta_2\sigma_\varepsilon^2$$
L'autocorrélation d'ordre 2, ρ_2, est ainsi égale à
$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{-\theta_2}{1 + (\theta_1)^2 + (\theta_2)^2}$$
Pour trouver θ_1 et θ_2, il nous faut donc résoudre *a priori* le système de deux équations suivant, non linéaire :
$$\frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + (\theta_1)^2 + (\theta_2)^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{-\theta_2}{1 + (\theta_1)^2 + (\theta_2)^2} = -0{,}47$$
On voit cependant qu'il faut nécessairement prendre $\theta_1 = 0$. La seconde équation devient alors
$$\frac{-\theta_2}{1 + (\theta_2)^2} = -0{,}47 \quad \text{soit} \quad 0{,}47(\theta_2)^2 - \theta_2 + 0{,}47 = 0$$
Le discriminant est égal à 0,1164 et les racines sont, approximativement, 0,7 et 1,43. On ne sait alors pas quelle racine sélectionner pour retenir le processus canonique. Dans un premier temps, on retient la première racine.

3. Le polynôme en L du modèle structurel s'écrit
$$x_t = [1 - 0{,}7\mathrm{L}^2]\varepsilon_t = (1 - \lambda_1\mathrm{L})(1 - \lambda_2\mathrm{L})\varepsilon_t$$
Si nous avons, dans l'étape précédente, sélectionné le modèle canonique, on a alors $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$. C'est en effet dans l'espace des racines du polynôme en L que l'on peut s'assurer que celui-ci est inversible. Dans l'espace des coefficients du modèle structurel, on ne peut rien dire *a priori*.
On trouve, en factorisant ce dernier polynôme, l'expression suivante.
$$[1 - 0{,}7\mathrm{L}^2] \approx (1 - 0{,}84\mathrm{L})(1 - (-0{,}84)\mathrm{L})$$
Nous sommes donc rassurés : on a bien $|0{,}84| < 1$ et $|-0{,}84| < 1$. En revanche, en prenant l'autre racine, la factorisation du polynôme conduit à l'expression suivante.
$$[1 - 1{,}43\mathrm{L}^2] \approx (1 - 1{,}2\mathrm{L})(1 - (-1{,}2)\mathrm{L})$$
Le modèle canonique n'aurait là pas été sélectionné.

4. Pour prévoir x_{t+1}, on prend
$$\hat{x}_t^{t+1} = \mathrm{E}(x_{t+1} \mid \Omega_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t+1} - \theta_2\varepsilon_{t-1} \mid \Omega_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t+1} \mid \Omega_t) - \theta_2\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \mid \Omega_t) = 0 - \theta_2\varepsilon_{t-1} = -\theta_2\varepsilon_{t-1}$$
Pour prévoir x_{t+2}, on prend
$$\hat{x}_t^{t+2} = \mathrm{E}(x_{t+2} \mid \Omega_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t+2} - \theta_2\varepsilon_t \mid \Omega_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t+2} \mid \Omega_t) - \theta_2\mathrm{E}(\varepsilon_t \mid \Omega_t) = 0 - \theta_2\varepsilon_t = -\theta_2\varepsilon_t$$
Enfin, pour prévoir x_{t+k} avec $k \geq 2$, on prend
$$\hat{x}_t^{t+k} = \mathrm{E}(x_{t+k} \mid \Omega_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t+k} - \theta_2\varepsilon_{t+k-2} \mid \Omega_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t+k} \mid \Omega_t) - \theta_2\mathrm{E}(\varepsilon_{t+k-2} \mid \Omega_t) = 0 - \theta_2 0 = 0$$

3. – Modèle 3

1. Le corrélogramme est typique d'un processus AR(1) pour lequel les autocorrélations sont régulièrement décroissantes avec un profil amorti exponentiellement. On conjecture ainsi le processus suivant
$$x_t - \phi_1 x_{t-1} = \varepsilon_t$$
avec $|\phi_1| < 1$ pour que le processus $\{x_t\}$ soit stationnaire.

2. Il nous faut «remonter», depuis le coefficient d'autocorrélation ρ_1, au paramètre ϕ_1. La variance du processus, γ_0, est égale à
$$\gamma_0 = \mathrm{V}(x_t) = \mathrm{V}(\phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t) = (\phi_1)^2\mathrm{V}(x_{t-1}) + \mathrm{V}(\varepsilon_t)$$
parce que $\mathrm{Cov}(x_{t-1}, \varepsilon_t) = 0$. En supposant le processus stationnaire, $\mathrm{V}(x_{t-1}) = \gamma_0$. La variance est donc égale à
$$\gamma_0 = \frac{\mathrm{V}(\varepsilon_t)}{1 - (\phi_1)^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - (\phi_1)^2}$$

Le même résultat peut être obtenu en inversant le processus. On a

$$x_t = \frac{1}{1-\phi_1 L}\varepsilon_t = (1+\phi_1 L + (\phi_1)^2 L^2 + \cdots)\varepsilon_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} (\phi_1)^\tau \varepsilon_{t-\tau}$$

La variance est alors égale à

$$\gamma_0 = V(x_t) = V\left(\sum_{\tau=0}^{\infty}(\phi_1)^\tau \varepsilon_{t-\tau}\right) = \sum_{\tau=0}^{\infty}[(\phi_1)^\tau]^2 V(\varepsilon_{t-\tau}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{\tau=0}^{\infty}[(\phi_1)^2]^\tau = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-(\phi_1)^2}$$

L'autocovariance d'ordre 1, γ_1, est égale à

$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(x_t, x_{t-1}) = \mathrm{Cov}(\phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t, x_{t-1}) = \phi_1 V(x_{t-1}) = \phi_1 \gamma_0$$

parce que $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, x_{t-1}) = 0$. On obtient ainsi directement l'autocorrélation d'ordre 1, ρ_1, qui est égale à

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1$$

Il n'était pas nécessaire finalement de calculer γ_0.
On trouve ϕ_1 directement :

$$\phi_1 = \rho_1 = 0{,}7$$

3. Le polynôme en L du modèle structurel s'écrit

$$(1-0{,}7L)x_t = (1-\lambda L)x_t = \varepsilon_t$$

avec $\lambda = 0{,}7$. On a bien $|\lambda| < 1$: le modèle canonique a effectivement été sélectionné.

4. Pour prévoir x_{t+1}, on prend

$$\widehat{x}_t^{t+1} = E(x_{t+1} \mid \Omega_t) = E(\phi_1 x_t + \varepsilon_{t+1} \mid \Omega_t) = \phi_1 E(x_t \mid \Omega_t) + E(\varepsilon_{t+1} \mid \Omega_t) = \phi_1 x_t + 0 = \phi_1 x_t$$

Pour prévoir x_{t+2}, on prend

$$\widehat{x}_t^{t+2} = E(x_{t+2} \mid \Omega_t) = E(\phi_1 x_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \mid \Omega_t) = E(\phi_1(\phi_1 x_t + \varepsilon_{t+1}) + \varepsilon_{t+2} \mid \Omega_t) =$$
$$(\phi_1)^2 E(x_t \mid \Omega_t) + \phi_1 E(\varepsilon_{t+1} \mid \Omega_t) + E(\varepsilon_{t+2} \mid \Omega_t) = (\phi_1)^2 x_t + \phi_1 0 + 0 = (\phi_1)^2 x_t$$

Plus généralement, on a

$$\widehat{x}_t^{t+k} = E(x_{t+k} \mid \Omega_t) = (\phi_1)^k x_t \quad \forall k > 0$$

La dernière réalisation connue du processus, x_t, constitue une valeur pivotale. Les prévisions s'annulent progressivement quand l'horizon de la prévision augmente.

4. – Modèle 4

1. Le corrélogramme est typique d'un processus AR(p) pour lequel les autocorrélations sont régulièrement décroissantes. Il ne peut pas s'agir d'un processus ARMA(1, 1) parce que le profil des autocorrélations, amorti avec des oscillations, est trop complexe. On conjecture ainsi le processus AR(2) suivant

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} = \varepsilon_t$$

2. Il nous faut «remonter», depuis les coefficients d'autocorrélation ρ_1 et ρ_2, aux paramètres ϕ_1 et ϕ_2.
Le calcul de l'autocovariance d'ordre k, notée γ_k, conduit à l'expression suivante.

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}(x_t, x_{t-k}) = \mathrm{Cov}(\phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t, x_{t-k}) = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2}$$

parce que $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, x_{t-k}) = 0 \ \ \forall k > 0$. La suite (γ_k) vérifie la même équation de récurrence que l'équation de définition du processus AR(2). Cette propriété est aussi valable pour la suite (ρ_k), la suite des autocorrélations.
Les équations de Yule-Walker, pour un AR(p), sont les p premières autocorrélations qui se déduisent de l'équation de récurrence, en utilisant la parité de la fonction d'autocorrélation.

$$\rho_1 = \phi_1\rho_0 + \phi_2\rho_{-1} = \phi_1 + \phi_2\rho_1 \quad \text{et} \quad \rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_0 = \phi_1\rho_1 + \phi_2$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme d'un système linéaire d'ordre p, facilement soluble. Ici, je procède par substitution. De la seconde équation, on obtient $\phi_2 = \rho_2 - \phi_1\rho_1$. En reportant dans la première équation, on trouve

$$\phi_1 = \rho_1 - \phi_2\rho_1 = \rho_1 - (\rho_2 - \phi_1\rho_1)\rho_1 \quad \text{soit} \quad \phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-(\rho_1)^2}$$

Pour ϕ_2, on obtient finalement

$$\phi_2 = \rho_2 - \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-(\rho_1)^2}\rho_1$$

Les calculs conduisent aux évaluations suivantes.

$$\phi_1 = -1{,}2 \quad \text{et} \quad \phi_2 = -0{,}5$$

3. Le polynôme en L du modèle structurel s'écrit

$$(1-(-1{,}2)L - (-0{,}5)L^2)x_t = (1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)x_t = \varepsilon_t$$

En cherchant à factoriser le polynôme, on trouve un discriminant négatif et donc des racines complexes. Plus précisément, on obtient $\lambda_1 = (-1{,}2 + i\sqrt{0{,}56})/2$ et $\lambda_2 = (-1{,}2 - i\sqrt{0{,}56})/2$. On trouve $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$: le processus est bien stationnaire et le modèle est donc sous forme canonique.

4. Pour prévoir x_{t+1}, on prend

$$\widehat{x}_t^{t+1} = \mathrm{E}(x_{t+1} \mid \Omega_t) = \mathrm{E}(\phi_1 x_t + \phi_2 x_{t-1} + \varepsilon_{t+1} \mid \Omega_t) =$$
$$\phi_1 \mathrm{E}(x_t \mid \Omega_t) + \phi_2 \mathrm{E}(x_{t-1} \mid \Omega_t) + \mathrm{E}(\varepsilon_{t+1} \mid \Omega_t) = \phi_1 x_t + \phi_2 x_{t-1} + 0 = \phi_1 x_t + \phi_2 x_{t-1}$$

Pour prévoir x_{t+2}, on prend

$$\widehat{x}_t^{t+2} = \mathrm{E}(x_{t+2} \mid \Omega_t) = \mathrm{E}(\phi_1 x_{t+1} + \phi_2 x_t + \varepsilon_{t+2} \mid \Omega_t) =$$
$$\mathrm{E}(\phi_1(\phi_1 x_t + \phi_2 x_{t-1} + \varepsilon_{t+1}) + \phi_2 x_t + \varepsilon_{t+2} \mid \Omega_t) =$$
$$[(\phi_1)^2 + \phi_2]\mathrm{E}(x_t \mid \Omega_t) + \phi_1\phi_2 \mathrm{E}(x_{t-1} \mid \Omega_t) + \phi_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t+1} \mid \Omega_t) + \mathrm{E}(\varepsilon_{t+2} \mid \Omega_t) =$$
$$[(\phi_1)^2 + \phi_2]x_t + \phi_1\phi_2 x_{t-1} + \phi_1 0 + 0 = [(\phi_1)^2 + \phi_2]x_t + \phi_1\phi_2 x_{t-1}$$

Plus généralement, on a

$$\widehat{x}_t^{t+k} = \mathrm{E}(x_{t+k} \mid \Omega_t) = \alpha_k x_t + \beta_k x_{t-1} \quad \forall k > 0$$

où les α_k et les β_k sont des fonctions compliquées des paramètres ϕ_1 et ϕ_2. Les deux dernières réalisations connues du processus, x_t et x_{t-1}, constituent les valeurs pivotales. Les prévisions s'annulent progressivement quand l'horizon de la prévision augmente.