Un résultat à connaître

$$\max_{x,y,z} x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \quad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

sous la contrainte $a\,x + b\,y + c\,z \leq \Omega$

$$x^{\star} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{\Omega}{a}$$

$$y^{\star} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{\Omega}{b}$$

$$z^{\star} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{\Omega}{c}$$

Une application directe

Le programme du consommateur avec une fonction d'utilité Cobb-Douglas

$$\max_{x,y} x^{\alpha} y^{1-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\text{sous la contrainte } p_x\, x + p_y\, y \leq R$$

$$x^{\star} = \alpha \frac{R}{p_x}$$

$$y^{\star} = (1-\alpha) \frac{R}{p_y}$$

La fonction d'utilité retenue

$$u(x_i, Y, \bar{\ell}-\ell_i) = (x_i)^{\alpha} \times \left(\frac{Y}{n}\right)^{\beta} \times (\bar{\ell}-\ell_i)^{1-\alpha-\beta} \quad 0 < \alpha, \beta, 1-\alpha-\beta < 1$$

- $\alpha = 3/16$ contribution du bien privé à l'utilité
- $\beta = 1/16$ contribution du bien public à l'utilité
- $1-\alpha-\beta = 3/4$ contribution du « loisir » à l'utilité

La fonction d'utilité est homogène de degré 1 en ses arguments

$$u(\lambda \times x_i, \lambda \times Y, \lambda(\bar{\ell}-\ell_i)) = \lambda \times u(x_i, Y, \bar{\ell}-\ell_i)$$

Elle supporte une interprétation en termes d'utilité cardinale

L'optimum de Pareto

$$\max_{x,\ Y \text{ et } \ell} u(x, Y, \bar{\ell}-\ell) = x^{\alpha} \times \left(\frac{Y}{n}\right)^{\beta} \times (\bar{\ell}-\ell)^{1-\alpha-\beta}$$

sous la contrainte

$$Y \leq a \times n(\ell - x)$$

Mais cette contrainte peut se réécrire comme suit

$$a \times n \times x + Y + a \times n(\bar{\ell}-\ell) \leq a \times n \times \bar{\ell}$$

Le programme est sous la forme du « résultat à connaître »

$$x^{\star} = \alpha \frac{a \times n \times \bar{\ell}}{a \times n} = \alpha \times \bar{\ell}$$

$$Y^{\star} = \beta \frac{a \times n \times \bar{\ell}}{1} = \beta \times a \times n \times \bar{\ell}$$

$$(\bar{\ell}-\ell)^{\star} = (1-\alpha-\beta) \frac{a \times n \times \bar{\ell}}{a \times n} = (1-\alpha-\beta) \times \bar{\ell}$$

$$\ell^{\star} = (\alpha+\beta)\bar{\ell}$$

L'équilibre concurrentiel de souscription volontaire - I

$$\max_{x_i,\ q_i \text{ et } \ell_i} (x_i)^{\alpha} \times \left(\frac{a}{n} \frac{q_i + \overline{Q}_{-i}}{w} \right)^{\beta} \times (\overline{\ell} - \ell_i)^{1-\alpha-\beta}$$

sous la contrainte

$$p \times x_i + q_i \leq w \times \ell_i$$

Mais ce programme peut se réécrire comme suit

$$\max_{x_i,\ q_i \text{ et } \ell_i} (x_i)^{\alpha} \times (q_i + \overline{Q}_{-i})^{\beta} \times (\overline{\ell} - \ell_i)^{1-\alpha-\beta}$$

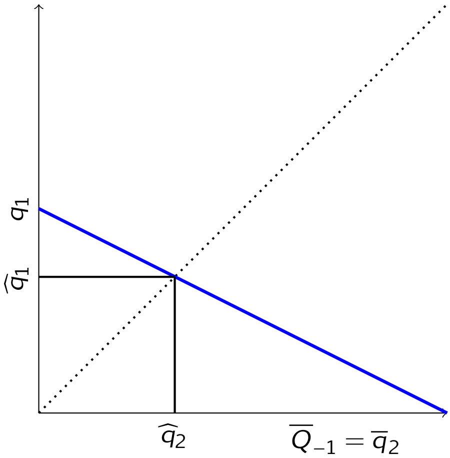
sous la contrainte

$$p \times x_i + (q_i + \overline{Q}_{-i}) + w(\overline{\ell} - \ell_i) \leq w \times \overline{\ell} + \overline{Q}_{-i}$$

Le programme est sous la forme du « résultat à connaître » ; la fonction de réaction s'en déduit immédiatement

$$q_i + \overline{Q}_{-i} = \beta \frac{w \times \overline{\ell} + \overline{Q}_{-i}}{1} \qquad \text{soit} \qquad q_i = \beta \times w \times \overline{\ell} - (1-\beta)\overline{Q}_{-i}$$

Représentation graphique de la fonction de réaction quand $n = 2$



Aucun effet d'entraînement !

L'équilibre concurrentiel de souscription volontaire - II

À l'équilibre symétrique, la fonction de réaction se réécrit

$$\frac{Q}{n} = \beta \times w \times \bar{\ell} - (1-\beta) Q \frac{n-1}{n}$$

On en déduit

$$\frac{Q}{w} = \frac{n \times \beta}{n(1-\beta) + \beta} \bar{\ell}$$

Et, donc

$$\widehat{Y} = a \times L_y = a \frac{Q}{w} = \frac{a \times n \times \beta}{n(1-\beta) + \beta} \bar{\ell}$$

On retrouve ainsi les solutions portées dans le texte

Faut-il croire à l'effet de dilution ?

- Mancur Olson, 1932-1998, *La Logique de l'action collective*. Il accorde une grande importance à cet effet de dilution : pas d'incitations à l'action dans les organisations de grande taille ;
- Elinor Ostrom, prix Nobel 2009, *Governing the Commons*. Sont « biens communs » les biens que les rapports sociaux désignent comme collectifs ; l'utilisation de tels biens communs est encadrée par des règles et des usages auxquels les individus ne peuvent pas échapper.

L'équilibre conc^tiel de prélèvements obligatoires - I

$$\max_{x_i \text{ et } \ell_i} (x_i)^{\alpha} \times (\bar{\ell} - \ell_i)^{1-\alpha-\beta}$$

sous la contrainte

$$p \times x_i + \tau \times w \times \ell_i \leq w \times \ell_i$$

Mais la contrainte budgétaire peut se réécrire comme suit

$$p \times x_i + (1-\tau) w (\bar{\ell} - \ell_i) \leq (1-\tau) w \times \bar{\ell}$$

Le programme est sous la forme du « résultat à connaître » ; les demandes s'en déduisent immédiatement

$$x_i^d = \frac{\alpha}{\alpha + 1 - \alpha - \beta} \frac{(1-\tau) w \times \bar{\ell}}{p} \quad \text{et} \quad (\bar{\ell} - \ell_i)^d = \frac{1 - \alpha - \beta}{\alpha + 1 - \alpha - \beta} \frac{(1-\tau) w \times \bar{\ell}}{(1-\tau) w}$$

L′équilibre conc$^{\text{tiel}}$ de prélèvements obligatoires - II

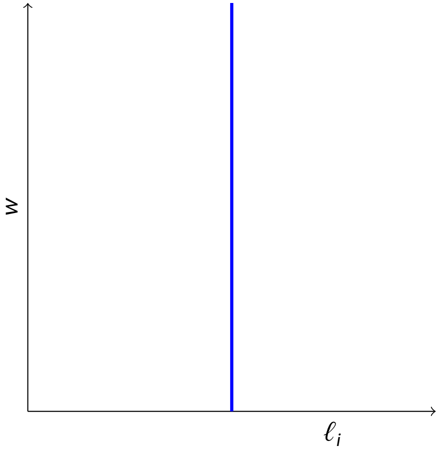
L′expression de la demande de loisir se simplifie comme suit

$$(\bar{\ell}-\ell_i)^d = \frac{1-\alpha-\beta}{1-\beta}\bar{\ell}$$

et l′offre de travail ℓ_i se déduit directement de cette dernière

$$\ell_i = \bar{\ell} - (\bar{\ell}-\ell_i)^d = \bar{\ell} - \frac{1-\alpha-\beta}{1-\beta}\bar{\ell} = \frac{\alpha}{1-\beta}\bar{\ell}$$

L'offre de travail est inélastique au salaire



L'offre de travail d'individus peu qualifiés